ПРАВИТЕЛЬСТВО САНКТ – ПЕТЕРБУРГА КОМИТЕТ ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение лицей 329

Невского административного района г. Санкт – Петербурга

Адрес: г. Санкт-Петербург, пр. Елизарова, 7б

Телефон/факс 417-18-27., e-mail: [school329spb@yandex.ru](mailto:school329spb@yandex.ru)

ПРОЕКТНО – ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

**ТЕМА ПРОЕКТА**

«Показательная и логарифмическая функция в деятельности человека»

Руководитель проекта

Налетова Светлана Владимировна

учитель математики

Работу выполнил

Смирнов Иван Александрович, Мальцева Оксана Александровна, Шамов Илья Андреевич

10а класс

г. Санкт – Петербург

2017

Оглавление

[Введение: 3](#_Toc475528043)

[Показательная функция и показательные уравнения 5](#_Toc475528044)

[История изучения: 5](#_Toc475528045)

[Определения: 8](#_Toc475528046)

[Использование показательной функции и показательных уравнений в жизни 10](#_Toc475528047)

[Логарифмическая функция и логарифмические уравнения 15](#_Toc475528048)

[Свойства логарифмов: 17](#_Toc475528049)

[Примеры логарифмической функции в жизни 21](#_Toc475528050)

[Заключение 25](#_Toc475528051)

[Список используемой литературы 30](#_Toc475528052)

# **Введение:**

**О проекте:**

Наша исследовательская работа по математике – это проект основанный на слиянии программирования на языке HTML с элементами CSS и на языке JavaScript со знаниями о логарифмический и показательных функциях и их влиянии на жизнь современного человека.

В нашем проекте вы узнаете все о логарифмических и показательных функциях и уравнениях, узнаете о применении того и другого в мире 21-ого века и сможете проверить свои знания по данным темам в режиме ONLINE с помощью написанного нами для вас теста или с помощью заданий в таблице Excel

**Цели и задачи исследовательской работы:**

В нашем проекте мы ставим перед собой задачу сбора всех сведений касательно истории изучения показательной и логарифмической функции и касательно использования данных знаний в деятельности человека.

Второй целью для нас являет мониторинг успеваемости учеников нашего класса по темам показательная функция и показательные уравнения и логарифмическая функция и логарифмические уравнения. Для решения этой задачи мы подготовили четыре ONLINE теста по этим темам, в которых программа, написанная нами, сама выставляет вам оценки

**Авторы исследовательской работы:**

**Шамов Илья Андреевич** - ученик 10А класса ГБОУ лицея №329. В проектной работе занимался составлением заданий к тестам, программированием ПО к сайту на JavaScript, программированием HTML-страниц, разработкой кода программ тестов, редактированием дизайна HTML- страниц.

**Мальцева Оксана Александровна** - ученица 10А класса ГБОУ лицея №329. В проектной работе являлась ответственной за подбор информации ифотоматериалов, подготовку элементов дизайна HTML –страниц и за демонстрацию показательной и логарифмической функции в Excel.

**Смирнов Иван Александрович** - ученик 10А класса ГБОУ лицея №329. В исследовательской работе разрабатывал дизайн HTML-страниц, отладку HTML-страниц и координации HTML, также занимался подбором информации.

**Налётова Светлана Владимировна -** научный руководитель исследовательской работы

# **Показательная функция и показательные уравнения**

## **История изучения:**

**Легенды, связанные с показательными уравнениями и функцией:**

**Легенда первая:**

Историю представим мы немного, события расставив по порядку: вы знаете, еще 40 веков назад в египетском папирусе записан ряд. Про семь домов, где кошек 49, и каждая из них по 7 мышей съедает и тем всем столько зерен сохраняет, что мер 17000 составляет.

**Легенда вторая:**

Как-то у арабского царя изобретатель шахматной доски, наверно потребовал за доску ту зерна. Причем за клетку первую – зерно, а за вторую – два просил изобретатель, за третью – снова больше раза в два, немало времени царь на подсчет потратил. Когда же подсчитали – прослезились: число двадцатизначно получилось! Хватило б зернами засеять нам всю сушу и миллионы лет пришлось зерно бы кушать.

**Штифель Михаил – ученый, изучающий показательную функцию**

**Штифель Михаил ( 1486 – 1567)** – знаменитый немецкий математик. Михаил Штифель учился в католическом монастыре, затем увлёкся идеями Лютера и стал сельским протестантским пастором. Изучая библию, старался найти в ней математическое истолкование. В результате своих изысканий предсказал конец  мира на 19 октября 1533 года, который, конечно, не произошёл, а Михаил Штифель был заключен в Вюртембергскую тюрьму, из которой его вызволил сам Лютер.

После этого Штифель посвящает свою работу математике, в которой он был гениальным самоучкой. Он опубликовал несколько научных трудов, и среди них знаменитая – “ Полная арифметика”.

В 1544 году Штифель первым в Европе сформулировал правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду. Он занимался изучением арифметической и геометрической прогрессии, систематически сравнивал действия над членами обеих сопоставляемых прогрессий и вводил дробные и отрицательные показатели степени. Штифель первым из математиков рассматривал отрицательные числа, как числа меньшие нуля, и одним из первых ввёл знак корня с целым показателем, круглые скобки и символы для многих неизвестных.

Его идеями пользовался при изобретении логарифмов Джон Непер.

Штифель оставил заметный след в развитии алгебры. В его главном труде *Arithmetica integra* (Нюрнберг, 1544) он дал содержательную теорию отрицательных чисел, возведения в степень, различных прогрессий и других последовательностей. Штифель впервые использовал понятия «корень» и «показатель степени»( *exponens*), причём подробно анализировал и целые, и дробные показатели. Опубликовал правило образования биномиальных коэффициентов и составил их таблицы до 18-й степени. Штифель переработал (фактически написал заново) книгу алгебраиста (*коссиста*) Кристофа Рудольфа, и использованные там современные обозначения арифметических операций с этого момента укоренились в математике (1553).

В этой же книге он впервые высказал идею, которая позже легла в основу теории логарифмов, и поэтому считается одним из их изобретателей: сопоставить геометрическую и арифметическую прогрессии, благодаря чему трудоёмкое умножение на второй шкале можно заменить простым сложением на первой. Штифель, однако, не опубликовал никаких расчётных таблиц для реализации своей идеи, и слава первооткрывателя логарифмов досталась Неперу.

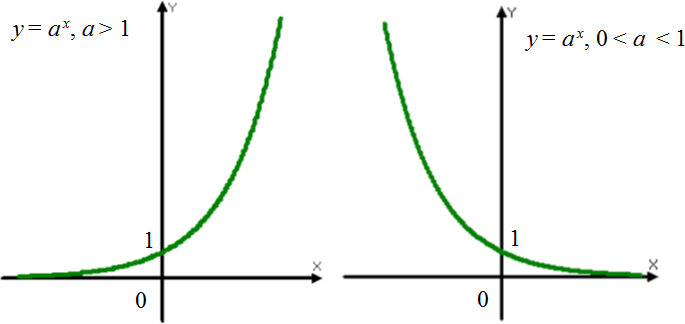


*Михаэль Штифель*

## **Определения:**

**Показательная функция** -  это функция  , зависящая от показателя степени x, при некотором фиксированном значении основании степени **a (определение термина с сайта ВИКИПЕДИЯ)**

**Показательная функция** —  математическая функция {\displaystyle f(x)=a^{x}} {\displaystyle a}, где **a** называется основанием степени, а **{\displaystyle x}x** — показателем степени



**Основные свойства показательной функции**

1. **Область определения** — множество **R** действительных чисел.

2. **Область значений** — множество **R+** всех положительных действительных чисел.

3. При **а > 1** функция возрастает на всей числовой прямой;

При **0<а<1** функция убывает на множестве **R**.

График показательной функции, построенный по определенным значениям вы сможете увидеть на нашем сайте, которой мы продемонстрируем на презентации нашей работы

**Показательные уравнения** - уравнения, которые содержат неизвестное в показателе степени

**Показательными называются уравнения**, в которых неизвестное содержится в показателе степени. Простейшее показательное уравнение имеет вид:  **=** , где а > 0, а ≠ 1, х – неизвестное

**Методы решения показательных уравнений:**

1. В результате преобразований уравнение можно привести к виду: **=**

Тогда применяем свойство: **= => f(x)=c**

2. При получении уравнения вида **= b** используется определение логарифма, получим: **f(x)=**

3. В результате преобразований можно получить уравнение вида:

Применяется логарифмирование:

Далее применяем свойство логарифма степени:

Выражаем и находим х

**Примеры решений показательных уравнений:**

|  |  |
| --- | --- |
| **2x=8**  **2x=**  **x=3** | **2x+2=4**  **2x+2=22**  **x+2=2**  **x=2-2=>x=0** |

**Использование показательной функции и показательных уравнений в жизни**

**В социальной сфере жизни общества:**

Изменение числа людей в стране на небольшом отрезке времени описывается формулой   hello_html_2298d9c8.gif , где  Nо  - число людей  в момент времени t=0, N -число людей в момент времени t, a k-константа



**В повседневной жизни:**

Если снять кипящий чайник с огня, то сначала он быстро остывает, а потом остывание идет гораздо медленнее, это явление описывается формулой T=(T1-T0)e-kt+T1



При падении тел в безвоздушном пространстве скорость их непрерывно возрастает. При падении тел в воздухе скорость падения тоже увеличивается, но не может превзойти определенной величины. Если считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости падения парашютиста, т.е. что F=kv , то через t секунд скорость падения будет равна: v=mg/k(1-e-kt/m), где m - масса парашютиста.



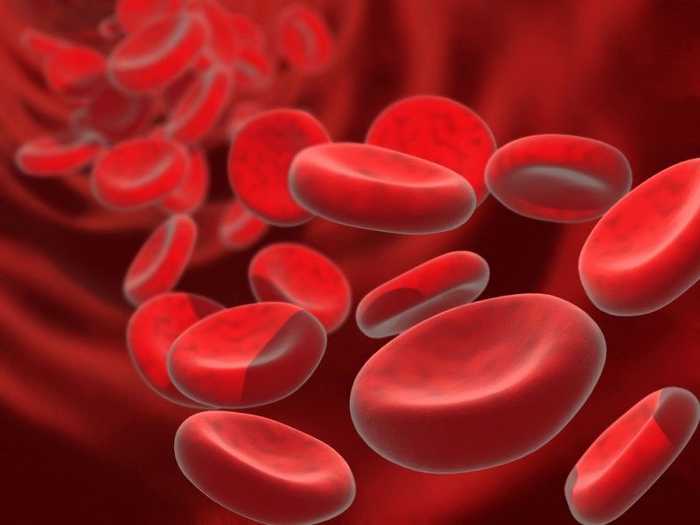
Рост древесины происходит по закону   A=A0∙akt ,  где  A- изменение количества древесины во времени; A0- начальное количество древесины; t-время; k, a - некоторые постоянные.

**В медицине:**

Процессы выравнивания  (именно так  называют процессы, изменяющиеся по законам показательной функции)  часто встречаются в жизни.

При испуге в кровь внезапно выделяется адреналин, который потом разрушается, причем скорость разрушения примерно пропорциональна количеству этого вещества, еще остающемуся в крови. При диагностике почечных болезней часто определяют способность почек выводить из крови радиоактивные изотопы, причем их количество в крови падает по показательному закону.

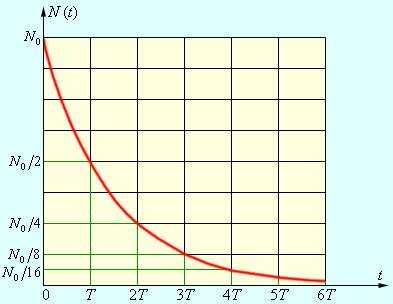
Примером обратного процесса может служить восстановление концентрации гемоглобина в крови у донора или у раненого, потерявшего много крови. В этом случае по показательному закону убывает разность между нормальным содержанием гемоглобина и имеющимся количеством этого вещества.



**В физике:**

**Полураспад веществ:**

Когда радиактивное вещество распадается, его количество уменьшается. Через некоторое время остается половина от первоначального вещества.  
Это время t0 называют периодом полураспада  
Общая формула этого процесса:   
Данное уравнение используют для определения возраста археологеческих находок



**Интересные факты о процессах, исход которых можно предсказать с помощью показательной функции:**

1) По закону показательной функции размножалось бы все живое на Земле, если бы для этого имелись благоприятные условия, т. е. не было естественных врагов и было вдоволь пищи. Доказательство тому – распространение Австралии кроликов, которых там раньше не было. Достаточно было выпустить пару особей, как через некоторое время их потомство стало национальным бедствием.

2)Если бы все маковые зерна давали всходы, то через 5 лет число “потомков” одного растения равнялось бы 243 • 1015 или приблизительно 2000 растений на 1кв.м суши

3)Потомство комнатных мух за лето только от одной самки может составить 8 • 1014. Эти мухи весили бы несколько миллионов тонн, а выстроенные в одну цепочку, они составили бы расстояние, большее, чем расстояние от Земли до Солнца. Потомство пары мух за 2 года имело бы массу, превышающую массу земного шара. И только благодаря сообществу животных и растений, когда увеличение одного вида влечет за собой рост количества его врагов, устанавливается динамическое равновесие в природе.

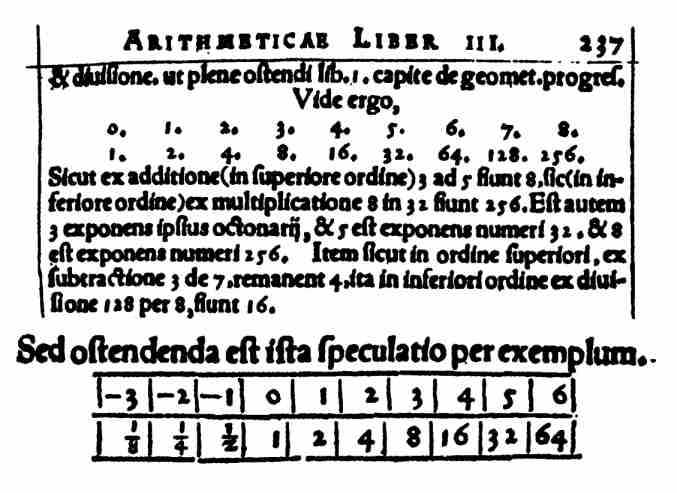
# **Логарифмическая функция и логарифмические уравнения**

**История изучений логарифмов**

**Древность:**

История логарифмов как алгебраического понятия прослеживается с античных времён. Идейным источником и стимулом применения логарифмов послужил тот факт (известный ещё Архимеду), что при перемножении степеней их показатели складываются

Индийский математик VIII века Вирасена, исследуя степенные зависимости, опубликовал таблицу целочисленных показателей (то есть, фактически, логарифмов) для оснований 2, 3, 4



**Средневековье и античность**

Решающий шаг был сделан в средневековой Европе. Потребность в сложных расчётах в XVI веке быстро росла, и значительная часть трудностей была связана с умножением и делением многозначных чисел, а также извлечением корней. В конце века нескольким математикам, почти одновременно, пришла в голову идея: заменить трудоёмкое умножение на простое сложение, сопоставив с помощью специальных таблиц геометрическую и арифметическую прогрессии, при этом геометрическая будет исходной. Тогда и деление автоматически заменяется на неизмеримо более простое и надёжное вычитание, упростятся также возведение в степень и извлечение корня.

Первым эту идею опубликовал в своей книге «*Arithmetica integra*» (1544) Михаэль Штифель, который, впрочем, не приложил серьёзных усилий для практической реализации своей идеи. Главной заслугой Штифеля является переход от целых показателей степени к произвольным рациональным (первые шаги в этом направлении сделали Николай Орем в XIV веке и Никола Шюке в XV веке).

Исследования Джона Непера:

В 1614 году шотландский математик-любитель Джон Непер опубликовал на латинском языке сочинение под названием «*Описание удивительной таблицы логарифмов*»( *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*). В нём было краткое описание логарифмов и их свойств, а также 8-значные таблицы логарифмов синусов, косинусов и тангенсов, с шагом 1'. Термин *логарифм*, предложенный Непером, утвердился в науке. Теорию логарифмов Непер изложил в другой своей книге «*Построение удивительной таблицы логарифмов*» ( *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*), изданной посмертно в 1619 году его сыном Робертом

Как вскоре обнаружилось, из-за ошибки в алгоритме все значения таблицы Непера содержали неверные цифры после шестого знака[[11]](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%98%D1%81%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%8F_%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B0%D1%80%D0%B8%D1%84%D0%BC%D0%BE%D0%B2#cite_note-IM61-11). Однако это не помешало новой методике вычислений получить широчайшую популярность, и составлением логарифмических таблиц занялись многие европейские математики.

**Новое время**

Первые попытки распространить логарифмы на комплексные числа предпринимали на рубеже XVII—XVIII веков Лейбниц и Иоганн Бернулли, однако создать целостную теорию им не удалось — в первую очередь по той причине, что тогда ещё не было ясно определено само понятие логарифма

**Определения и термины**

**Логари́фм** числа b по основанию a (от греч. λόγος — «слово», «отношение» и ἀριθμός — «число») определяется, как показатель степени, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b. Обозначение: , произносится: «логарифм b по основанию a   
Из определения следует, что нахождение  равносильно решению уравнения  **(определение термина с сайта ВИКИПЕДИЯ)**

Логарифм в переводе с греческого буквально означает **"число, изменяющее отношение"**

**Свойства логарифмов:**

1)    http://www.webmath.ru/poleznoe/images/formules_275.png - основное логарифмическое тождество.

2)    http://www.webmath.ru/poleznoe/images/formules_276.png

3)   http://www.webmath.ru/poleznoe/images/formules_277.png

Логарифм единицы по любому положительному, отличному от 1, основанию равен нулю. Это возможно потому, что из любого действительного числа можно получить 1 только возведя его в нулевую степень.

4)    http://www.webmath.ru/poleznoe/images/formules_278.png - логарифм произведения.

Логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей.

5)   http://www.webmath.ru/poleznoe/images/formules_279.png - логарифм частного.

Логарифм частного (дроби) равен разности логарифмов сомножителей.

6)   http://www.webmath.ru/poleznoe/images/formules_280.png - логарифм степени.

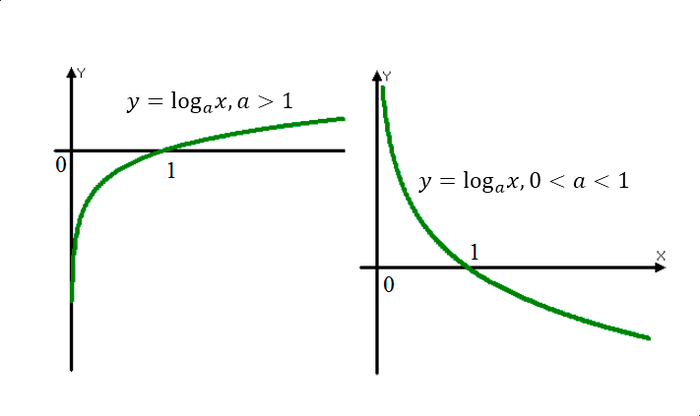
Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания.

7)    http://www.webmath.ru/poleznoe/images/formules_281.png

8)    http://www.webmath.ru/poleznoe/images/formules_282.png

9)   http://www.webmath.ru/poleznoe/images/formules_283.png - переход к новому основанию.

**Логарифмическая функция**

**Функция**, которую можно записать формулой http://www.webmath.ru/poleznoe/images/formules_355.png, называется **логарифмической функцией**. Здесь http://www.webmath.ru/poleznoe/images/formules_356.png - аргумент, http://www.webmath.ru/poleznoe/images/formules_357.png - основание логарифма. 

**Основные свойства логарифмической функции:**

1)**Областью определения** логарифмической функции будет являться все множество положительных вещественных чисел. Для краткости его еще обозначают **R+**. Очевидное свойство, так как каждое положительное число имеет логарифм по основанию **а**

2. **Областью значения** логарифмической функции будет являться все множество вещественных чисел

3. Если основание логарифмической функции **a>1**, то на всей области определения функции возрастает. Если для основания логарифмической функции выполняется следующее неравенство **0<a<1**, то функция убывает

 4. **График логарифмической** функции всегда проходит через точку (1;0)

5. **Возрастающая логарифмическая функция**, будет положительной при x>1, и отрицательной при 0<х<1

6. **Убывающая логарифмическая функция**, будет отрицательной при х>1, и положительной при 0<x<1

**Логарифмические уравнения и неравенства**

**Логарифмическим** называется уравнение, содержащее неизвестную величину под знаком логарифма

Поскольку функция принимает все значения из R, когда переменная x «пробегает» множество, то простейшее логарифмическое уравнение  
 **имеет решение x= для любого b из R**

**Примеры решений логарифмических уравнений и неравенств:**

**Пример 1**

\[ \lg(x^2-6) = \lg(8+5x). \]  
**Решение:**  
В область допустимых значений входят только те *x*, при которых выражение, находящееся под знаком логарифма, больше нуля. Эти значения определяются следующей системой неравенств:

\[ \begin{cases} x^2-6>0, \\ 8+5x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 6, \\ x>-1,6. \end{cases} \Leftrightarrow \]

\[ \begin{cases} x\in(-\mathcal{1};-\sqrt{6})\cup(\sqrt{6};+\mathcal{1}), \\ x\in (-1,6;+\mathcal{1}). \end{cases} \]  
С учетом того, что

\[ -1,6 = -\sqrt{2,56}> -\sqrt{6}, \]  
получаем промежуток, определяющий область допустимых значений данного логарифмического уравнения:

\[ x\in(\sqrt{6};+\mathcal{1}). \]  
На основании теоремы 1, все условия которой здесь выполнены, переходим к следующему равносильному квадратичному уравнению:

\[ x^2-6 = 8 + 5x\Leftrightarrow x^2-5x-14=0\Leftrightarrow \]  \[ x_1 = 7,\, x_2 = -2. \]

В область допустимых значений входит только первый корень.

**Ответ:** x = 7.

**Пример 2**

\[ \log_{0,2}(-x^2+4x+5)=\log_{0,2}(-x-31). \]

**Решение:**

Область допустимых значений уравнения определяется системой неравенств:

\[ \begin{cases} -x^2+4x+5>0, \\ -x-31>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<5, \\ x<-31. \end{cases} \]

**Ответ: корней нет**

# **Примеры логарифмической функции в жизни**

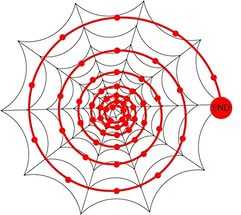
Спирали широко проявляют себя в живой природе. Спирально закручиваются усики растений, по спирали происходит рост тканей в стволах деревьев.



Рога таких рогатых млекопитающих, как архары – горные козлы, закручены по логарифмической спирали.



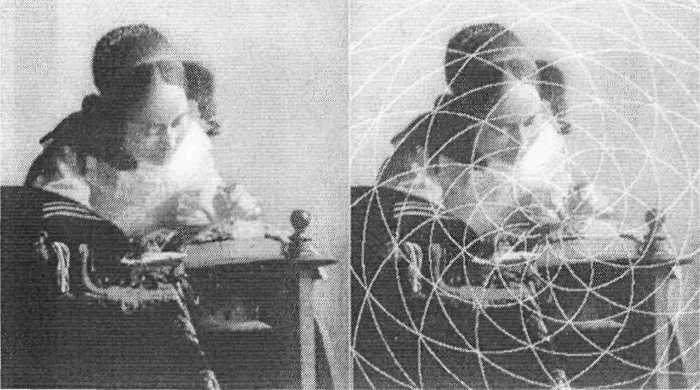
Один из наиболее распространенных пауков, эпейра, сплетая паутину, закручивает нити вокруг центра по логарифмическим спиралям



По логарифмическим спиралям закручены и многие галактики, в частности Галактика, которой принадлежит Солнечная система – Млечный путь



Логарифмические линии в природе замечают не только математики, но и художники, например, этот вопрос чрезвычайно волновал Сальвадора Дали. Его навязчивой идеей стала картина Вермеера «Кружевница», репродукция которой висела в кабинете его отца. Много лет спустя Сальвадор Дали попросил в Лувре разрешение написать копию с этой картины. Затем попросил киномеханика показать на экране репродукцию нарисованной копии. ϖОн объяснил, что, пока не написал эту копию, в сущности, почти ничего не понимал в «Кружевнице», и ему понадобилось размышлять над этим вопросом целое лето, чтобы осознать наконец, что он инстинктивно провёл на холсте строгие логарифмические кривые.



**Логарифмы широко используется в различных областях наук:**

**В Физике:**

Интенсивность звука (децибелы). оценивается также уровнем интенсивности по шкале децибел; число децибел N=10lg(I/I0), где I — интенсивность данного звука ϖАстрономия Если известна видимая звёздная величина и расстояние до объекта, можно вычислить абсолютную звёздную величину по формуле: ϖХимия Водородный показатель, "pH ", — это мера активности ионов водорода в растворе, количественно выражающая его кислотность, вычисляется как отрицательный десятичный логарифм концентрации водородных ионов, выраженной в молях на литр: mbox{pH} = -lg left [ mbox{H}+ ight]

**В музыке:**

В основе устройства музыкальной гаммы лежат определенные закономерности. Для построения гаммы гораздо удобнее пользоваться, оказывается, логарифмами соответствующих частот: log 2, log 2...

# **Заключение**

В ходе исследовательской работы на тему «Показательная и логарифмическая функция в деятельности человека» наш коллектив не только собрал информацию об истории изучения и использовании показательных и логарифмических функций, но и в удобном формате преподнесли эту информацию нашему классу в течении двух уроков, после чего мы провели мониторинг учащихся с помощью 4 тестов, расположенных на сайте-презентации нашего проекта.

Мониторинг показал, что учащимися усвоена тема Показательная функция и Логарифмическая функция

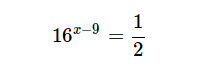
Ход мониторинга:

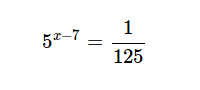


Для мониторинга у нас ипользуется массив из заданий разной сложности, так, каждому ученику приходется решать свой набор заданий, который не повторяется ни у кого другого. Это удалось достичь с помощью оператора RANDOM в программе, отвечающей за взаимодействие теста и пользователя.

**Примеры зданий:**

**Показательные уравнения:**





G:\Проект по математике\good\pokaz_func\b_questions\b1.png

G:\Проект по математике\good\pokaz_func\b_questions\b13.png

G:\Проект по математике\good\pokaz_func\b_questions\b12.png

G:\Проект по математике\good\pokaz_func\b_questions\b14.png

G:\Проект по математике\good\pokaz_func\b_questions\b10.png

G:\Проект по математике\good\pokaz_func\c3_questions\c6.png

G:\Проект по математике\good\pokaz_func\c3_questions\c7.png

G:\Проект по математике\good\pokaz_func\b_questions\b11.png

G:\Проект по математике\good\pokaz_func\c3_questions\c4.png

G:\Проект по математике\good\pokaz_func\c3_questions\c5.png

G:\Проект по математике\good\pokaz_func\c1_questions\c1.png

**Логарифмические уравнения и неравенства:**G:\Проект по математике\good\logarithms\b_questions\b7.jpgG:\Проект по математике\good\logarithms\b_questions\b1.jpg G:\Проект по математике\good\logarithms\b_questions\b6.jpg

G:\Проект по математике\good\logarithms\b_questions\b4.jpg

G:\Проект по математике\good\logarithms\b_questions\b5.jpg

G:\Проект по математике\good\logarithms\b_questions\b2.jpg

G:\Проект по математике\good\logarithms\b_questions\b3.jpg

Познакомиться с практической частью нашей исследовательской работе вы можете на нашем [сайте](file:///C:\Users\403\Desktop\Проект%20по%20математике\good\start.html), там же вы сможете пройти тесты и проверить свои знания по темам «Показательные уравнения» и «Логарифмические уравнения»

**Премечание:**

**Для запуска сайта требутся:**

* Открыть папку С:\Проект по математике\good\
* В данной папке найти документ html с названием «start.html»
* Щелкнуть по иконке документа ПКМ – открыть с помощь – выбираете удобный вам браузер(мы вам рекомендуем браузер GOOGLE CHROME)

**Или**

* Пройти по [ссылке](file:///C:\Users\Учебная%20фирма\Downloads\good\start.html)

# **Список используемых материалов**

1. «Математика: алгебра и начала математического анализа» -учебник 10-11 классов, авторы: Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева
2. Алгебра и математический анализ (углубленное изучение), авторы: Н.Я. Валенкин, С.М. Шварцбурд
3. Карманный Технический Справочник (часть 1) от 1936 года, автор С.Н. Вашков
4. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Показательная_функция>
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, тома I, II. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001
6. <http://youclever.org/book/logarifmicheskie-neravenstva-1>
7. <https://ru.wikipedia.org/wiki/Логарифм>
8. Рыбников К. А. История математики. В двух томах. — М.: Изд. МГУ, 1963. — Т. II
9. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1966, Том II
10. http://alexlarin.net/